Präsenzübung V zur Vorlesung ELEKTRODYNAMIK SoSe 2011

Prof. Dr. Manfred Lein
13. Mai 2011 PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr

SEPARATION DER VARIABLEN

Eine wichtige Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen ist die Separation der Variablen. Diese wollen wir hier an einem einfachen Beispiel ausprobieren.

[P14] *Trennung der Variablen in kartesischen Koordinaten*
Zwei geerdete Metallplatten liegen parallel zur xz-Ebene im Abstand a parallel übereinander. Bei $x = 0$ sind die beiden Platten durch einen senkrechten Streifen miteinander verbunden, der ein y-abhängiges Potential $\Phi_0(y)$ trägt.

(a) Geben Sie die Randbedingungen für das Potential $\Phi(x, y, z)$ im Bereich $x > 0$, $0 < y < a$ an, es sollten vier Stück sein.

(b) Stellen Sie die Laplace-Gleichung auf und machen Sie den Ansatz $\Phi(x, y, z) = X(x)Y(y)$ (warum hängt das Potential nicht explizit von z ab?). Vereinfachen Sie so weit, bis Sie zwei normale Differentialgleichungen zweiter Ordnung erhalten. Lösen Sie diese allgemein unter der Annahme, die Konstante der y-abhängigen DGL ist die negative Konstante.

(c) Eliminieren Sie mithilfe der Randbedingungen nun so viele Integrationsvariablen wie möglich. Dabei wird es passieren, dass es für eine Konstante mehrere Lösungen gibt, die eine Randbedingung erfüllen. Wie berücksichtigen Sie dies in der Lösung für $\Phi(x, y)$?

(d) Wenn alles richtig ist, sollte das Potential bis jetzt irgendwie so aussehen:

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mathrm{e}^{-n\pi x/a} \sin(n\pi y/a)\,.$$

Nun versuchen Sie mit der letzten verbliebenen Randbedingung ein Integral zu bestimmen, mit dem Sie die C_n rausfinden können. Beachten Sie dazu, dass die Funktionen $\sin(n\pi y/a)$ ein orthogonales Funktionensystem bilden.

(e) Wir nehmen nun an, das auf dem Streifen vorgegebene Potential sei ein konstantes Potential, d.h., $\Phi_0(y) \equiv \phi_0 = \text{const}$. Bestimmen Sie damit die C_n und die Lösung der Laplace-Gleichung für diesen Fall.

[P15] *Entwicklungskoeffizienten*
Wir betrachten wie letzte Woche die Legendre-Polynome $P_n(x)$ für $x \in [-1, 1]$. Die ersten fünf lauten $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ und $P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$. Wir betrachten nun die Funktion $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$. Entwickeln Sie diese in Legendre-Polynome,

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(x)\,,$$

und bestimmen sie sämtliche C_n. Machen Sie sich im Vorfeld klar, dass sowieso $C_n = 0$ für alle $n > 4$. Bestimmen Sie die verbleibenden C_n einmal direkt, und einmal durch Berechnen der Integrale, mit denen Koeffizienten von Entwicklungen in orthogonale Funktionensysteme gegeben sind.